

M.C.ESCHER KALEIDOZYKEL

M. Engel, 7. Mai 2003

Im vorliegenden Text sollen einige Fragen geklärt werden, die sich im Zusammenhang mit Kaleidozyklen stellen: Welche Eigenschaften müssen Tetraeder haben, damit man aus ihnen geschlossene und rotierbare Ringe bilden kann? Wie lässt sich die Rotation eines solchen Ringes mathematisch beschreiben? Zu welcher Anzahl von Tetraedern gibt es Kaleidozyklen? Zudem sollen einige Spezialfälle von Kaleidozyklen näher betrachtet werden.

Reguläre Kaleidozykel

Zunächst beschränken wir unsere Betrachtungen auf Kaleidozyklen, die aus regulären Tetraedern zusammengesetzt sind.

I. Seien A, B, C, D die Eckpunkte eines regulären Tetraeders. Sei P der Mittelpunkt der Kante $[AB]$, sowie Q der Mittelpunkt der Kante $[CD]$. Sei M der Mittelpunkt von $[PQ]$ (dann ist M zugleich Schwerpunkt des Tetraeders). Es gilt:

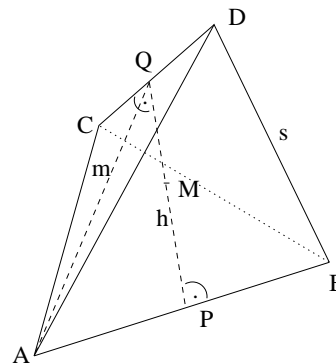
$$AB \perp PQ \perp CD \perp AB. \quad (1)$$

Die Kantenlänge des Tetraeders sei s . Sei m die Höhe der Seitenflächen (gleichseitige Dreiecke). Sei $h := \overline{PQ}$. Dann gilt:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 = m^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

und es folgt

$$s = h\sqrt{2}. \quad (2)$$



II. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 8$. Sei

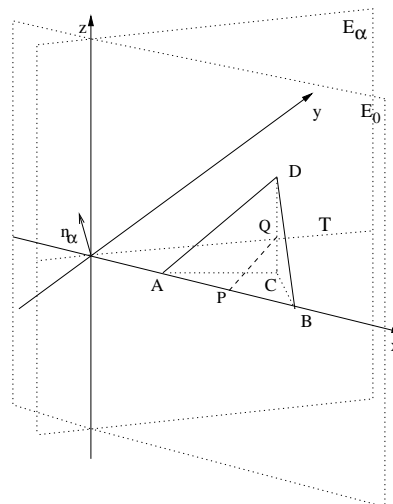
$$E_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

die "x-z-Ebene". Sei $\alpha := \frac{2\pi}{n}$ (wegen $n \geq 8$ ist $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$) und sei

$$E_\alpha := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x \tan \alpha\}$$

$$\vec{n}_\alpha := (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0).$$

Die Ebenen E_α und E_0 schneiden sich in der z-Achse. Der Winkel zwischen ihnen ist α . Der Vektor \vec{n}_α ist Normalenvektor der Ebene E_α .



Es ist also

$$\vec{u} := \frac{\overrightarrow{A_t B_t}}{\|\overrightarrow{A_t B_t}\|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \in E_0.$$

Wegen (1), (3) ergibt sich (mit \times sei das Kreuzprodukt bezeichnet)

$$\begin{aligned} \vec{v} &:= \frac{\overrightarrow{C_t D_t}}{\|\overrightarrow{C_t D_t}\|} = \frac{1}{\|\vec{u} \times \vec{n}_\alpha\|} (\vec{u} \times \vec{n}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t \cos^2 \alpha}} \begin{pmatrix} -\sin t \cos \alpha \\ -\sin t \sin \alpha \\ \cos t \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t \tan^2 \alpha}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\sin t \tan \alpha \\ \cos t \end{pmatrix} \in E_\alpha \end{aligned}$$

Sei weiter

$$\begin{aligned} \vec{w} &:= -(\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t \cos^2 \alpha}} \begin{pmatrix} -\sin^2 t \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin t \cos t \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t \tan^2 \alpha}} \begin{pmatrix} -\sin^2 t \tan \alpha \\ 1 \\ \cos t \sin t \tan \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(es ist $\|\vec{w}\| = 1$).

Wegen (1) und (4) ist $h\vec{w} = \overrightarrow{P_t Q_t} = Q_t - P_t$, mit entsprechenden Koordinaten also

$$h \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Unter Beachtung von $P_t \in E_0$ und $Q_t \in E_\alpha$ (d.h. $p_2 = 0$ und $q_2 = q_1 \tan \alpha$) erhalten wir

$$q_2 = hw_2, \quad q_1 = h \frac{w_2}{\tan \alpha}, \quad p_1 = q_1 - hw_1 = h \left(\frac{w_2}{\tan \alpha} - w_1 \right).$$

Wir legen nun fest, dass der Mittelpunkt M_t von $[P_t Q_t]$ stets in der x-y-Ebene liegen soll. Da q_3 und w_3 dasselbe Vorzeichen haben, folgt weiter

$$q_3 = -p_3 = h \frac{w_3}{2}.$$

Zusammenfassend gilt also (wobei w wie oben berechnet)

$$P_t = h \begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan \alpha} - w_1 \\ 0 \\ -\frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \in E_0, \quad Q_t = h \begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan \alpha} \\ w_2 \\ \frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \in E_\alpha$$

und A_t, B_t, C_t, D_t sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A_t &= P_t - \frac{h}{2} \sqrt{2} \vec{u}, & B_t &= P_t + \frac{h}{2} \sqrt{2} \vec{u}, \\ C_t &= Q_t - \frac{h}{2} \sqrt{2} \vec{v}, & D_t &= Q_t + \frac{h}{2} \sqrt{2} \vec{v}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $A, B \in E_0$ und $C, D \in E_\alpha$.

VI. Etwas kompakter als durch explizite Angabe der Position der Eckpunkte lässt sich die Position des Tetraeders zum Zeitpunkt t mittels der affinen Transformation

$$\Phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & v_1 \\ u_2 & w_2 & v_2 \\ u_3 & w_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan \alpha} - \frac{w_1}{2} \\ \frac{w_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Durch Φ_t werden alle Punkte eines Tetraeders, der mit seinem Mittelpunkt im Ursprung liegt, derart dass

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

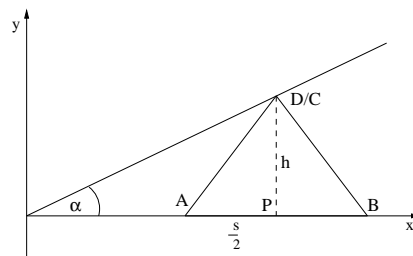
gilt, auf die entsprechenden Punkte eines Tetraeders, der in der gewünschten Position für Zeitpunkt t liegt, abgebildet.

VII. Wir hatten n gerade mit $n \geq 8$ vorausgesetzt. Für $n \leq 6$ gibt es kein rotierbares reguläres Kaleidozykel:

Betrachten wir ein Kaleidozykel aus n regulären Tetraedern (n gerade) zum Zeitpunkt $t = 0$. Sei p_1 die x-Koordinate von P . Offensichtlich muss

$$p_1 \geq \frac{s}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

gelten, sonst würden sich mehrere Tetraeder im Ursprung überschneiden.



Nun ist $p_1 = \frac{h}{\tan \alpha}$ und wir erhalten wegen $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ die Bedingung

$$\tan \frac{2\pi}{n} \leq \sqrt{2}$$

welche für gerades $n \in \mathbb{N}$ nur für $n \geq 8$ erfüllbar ist. Es folgt, dass Kaleidozykel aus regulären Tetraedern mindestens 8 Komponenten haben müssen, damit sie rotiert werden können. Zwar kann ein Kaleidozykel mit 6 Tetraedern gebaut werden, aber es kann nicht in die Ausgangsposition $t = 0$ gebracht und somit auch nicht vollständig rotiert werden. Dass aber mindestens 6 Tetraeder für ein Kaleidozykel gebraucht werden, ist offensichtlich.

Im Falle $n = 6$ kann man dennoch erreichen, dass eine vollständig Rotation möglich ist, indem man nichtreguläre Tetraeder benutzt. Dazu mehr im nächsten Abschnitt.

Normale Kaleidozykel

VIII. Ausgehend von regulären Kaleidozykeln zeigen wir im folgenden, wie sich durch Einführung von Parametern eine ganze Klasse von Kaleidozykeln ergibt, die wir normale Kaleidozyklen nennen.

Seien die Notationen wie im ersten Abschnitt. Insbesondere sei $n \geq 6$ und gerade, sowie $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Wir haben gesehen, dass sich die Positionen der Eckpunkte A, B, C, D (wir lassen die Indices t jetzt weg) eines Tetraeders in einem regulären Kaleidozykel aus den Positionen der Punkte P und Q sowie den Vektoren \vec{u} und \vec{v} (welche wiederum die Richtungen der Vektoren \overrightarrow{AB} bzw. \overrightarrow{CD} angeben) bestimmen:

$$\begin{aligned} A &= P - \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{u}, & B &= P + \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{u}, \\ C &= Q - \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{v}, & D &= Q + \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{v}. \end{aligned}$$

Die normierten Vektoren \vec{u} und \vec{v} wurden jeweils mit $\frac{h\sqrt{2}}{2}$ skaliert, damit $ABCD$ ein reguläres Tetraeder bildet.

Setzen wir stattdessen

$$\begin{aligned} A &= P - \lambda\vec{u}, & B &= P + \mu\vec{u}, \\ C &= Q - \kappa\vec{v}, & D &= Q + \nu\vec{v}. \end{aligned}$$

wobei $(\lambda, \mu, \kappa, \nu) \in \mathbb{R}^4$ beliebig, so ist $ABCD$ nach wie vor ein (nicht notwendig reguläres) Tetraeder mit

$$\begin{aligned} A, B &\in E_0, \\ C, D &\in E_\alpha. \end{aligned}$$

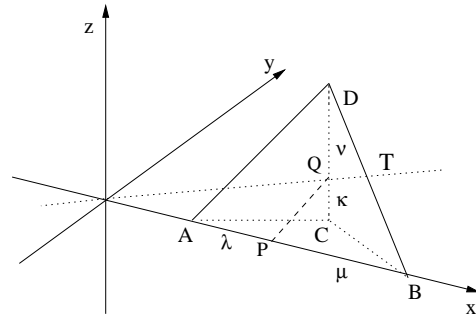
Durch symmetrische Anordnung weiterer (zu $ABCD$ äquivalenter) Tetraeder ergibt sich so wiederum ein Ring, in dem benachbarte Tetraeder je eine gemeinsame Kante besitzen.

Damit das so entstandene Kaleidozykel rotierbar ist, muss offensichtlich gelten:

$$|\lambda|, |\mu|, |\kappa|, |\nu| \leq \frac{h}{\tan \alpha}$$

(sonst gibt es Positionen des Kaleidozykels, in denen sich im Ursprung mehrere Tetraeder überschneiden, vgl. VII.).

Bei ansonsten freier Wahl der Parameter gibt es verschiedene Konfigurationen, die im wesentlichen dasselbe Kaleidozykel liefern (z.B. sind bis auf Rotationsposition und Lage im Koordinatensystem die Konfigurationen $(\lambda, \mu, \kappa, \nu)$, $(\kappa, \nu, \lambda, \mu)$ und $(\mu, \lambda, \nu, \kappa)$ gleich). Deshalb schränken wir die Wahl der Parameter weiter ein. Man überlegt sich, dass in folgender Definition alle wesentlich verschiedenen Konfigurationen abgedeckt sind:



Ein Kaleidozykel aus n Komponenten, das durch Symmetrie aus einem Tetraeder $ABCD$ mit

$$\begin{aligned} A &= P - \lambda \vec{u}, & B &= P + \mu \vec{u}, \\ C &= Q - \kappa \vec{v}, & D &= Q + \nu \vec{v}. \end{aligned}$$

hervorgeht, wobei

$$\lambda, \kappa \in \left[0, \frac{h}{\tan \alpha}\right], \quad \mu \in [-\lambda, \lambda], \quad \nu \in [-\kappa, \kappa],$$

heißt normales Kaleidozykel. Notation: $K_n(\lambda, \mu, \kappa, \nu)$.

Bemerkung: Aufgrund der Definition von P, Q, \vec{u}, \vec{v} haben Tetraeder, die Bestandteile von normalen Kaleidozyklen sind, die folgende (in unserem Zusammenhang entscheidende) Eigenschaft: zwei gegenüberliegende Kanten AB und CD und ihr gemeinsames Lot PQ stehen paarweise senkrecht aufeinander (vgl. (1)).

Spezielle Kaleidozykel

Durch die Parameter $n, \lambda, \kappa, \mu, \nu$ ergeben sich eine Vielzahl verschiedener Formen und Typen von Kaleidozyklen. Zum Abschluß seien einige spezielle Konfigurationen erwähnt, die von besonderem Interesse sind, da die entsprechenden Kaleidozyklen zusätzliche geometrische Eigenschaften haben.

IX. Im Falle $\lambda = \mu, \kappa = \nu$ ergeben sich gleichschenklige Kaleidozyklen, d.h. alle Tetraederseitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke. Hierzu gehören insbesondere

- die regulären Kaleidozykel mit der Konfiguration $n \geq 8, \lambda = \mu = \kappa = \nu = \frac{h}{2}\sqrt{2}$, welche zu Beginn eingehend behandelt wurden,
- die geschlossenen Kaleidozykel mit der Konfiguration $\lambda = \mu = \kappa = \nu = \frac{h}{\tan \alpha}$, welche die Eigenschaft haben, dass sich an den Rotationspositionen $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi, t = \frac{3\pi}{2}$ Ecken verschiedener Tetraeder im Ursprung berühren und sich das "Auge" des Rings schließt.

X. Im Falle $\mu = \nu = 0$ ergeben sich rechtwinklige Kaleidozykel, d.h. alle Tetraederseitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke. Erwähnenswert ist hier der

- sog. umstülpbare Würfel, der durch die Konfiguration $n = 6, \lambda = \mu = \frac{h}{\tan \alpha}, \mu = \nu = 0$ definiert ist. Der Name kommt daher, dass sich dieses Kaleidozykel in der Rotationsposition $t = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ durch Verlängerung der Kanten AB und CD des Basistetraeders und entsprechender Kanten der anderen Tetraeder zu einem Würfel ergänzen lässt.

